Invers Laplace

Febrizal, MT

Review

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$	$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
a	$\frac{a}{s}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

Review

Theorem 1 The first shift theorem

If $L\{f(t)\} = F(s)$, then $L\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$

Theorem 2 Multiplying by t

If $L\{f(t)\} = F(s)$, then $L\{tf(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{F(s)\}$

Theorem 3 Dividing by t

If $L\{f(t)\} = F(s)$, then $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{\sigma=s}^{\infty} F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$

provided $\lim_{t\to 0}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$ exists.

Latihan

1 $\sin 3t$

2 $\cos 2t$

3 e^{4t}

4 $6t^2$

5 $\sinh 3t$

6 $t \cosh 4t$

7 $t^2 - 3t + 4$

8 $\dfrac{e^{3t} - 1}{t}$

9 $e^{3t} \cos 4t$

10 $t^2 \sin t$

Here are the results.

1 $$\frac{3}{s^2+9}$$

2 $$\frac{s}{s^2+4}$$

3 $$\frac{1}{s-4}$$

4 $$\frac{12}{s^3}$$

5 $$\frac{3}{s^2-9}$$

6 $$\frac{s^2+16}{(s^2-16)^2}$$

7 $$\frac{1}{s^3}(4s^2-3s+2)$$

8 $$\ln\left(\frac{s}{s-3}\right)$$

9 $$\frac{s-3}{s^2-6s+25}$$

10 $$\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

- Invers Transformasi Laplace adalah proses kebalikan dari Transformasi Laplace; jika diberikan suatu transformasi Laplace, kita harus mencari fungsi t dari laplace tsb.
- Sebagai contoh, kita ketahui bahwa $\dfrac{a}{s^2+a^2}$ adalah transformasi laplace dari sin *at*.
- Sehingga kita bisa menuliskan $L^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin at$
- L^{-1} merupakan simbol dari invers transformasi Laplace.

(a) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = e^{2t};$

(c) $L^{-1}\left\{\dfrac{4}{s}\right\} = 4$

(b) $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+25}\right\} = \cos 5t;$

(d) $L^{-1}\left\{\dfrac{12}{s^2-9}\right\} = 4\sinh 3t$

Latihan

Find the inverse transforms of

(a) $\dfrac{1}{2s-3}$; (b) $\dfrac{5}{(s-4)^3}$; (c) $\dfrac{3s+4}{s^2+9}$.

(a) $\frac{1}{2}e^{3t/2}$; (b) $5t^2e^{4t}$; (c) $3\cos 3t + \frac{4}{3}\sin 3t$

- Contoh yang diberikan sebelumnya masih dalam bentuk standar sehingga mudah untuk diselesaikan.
- Bagaimana jika invers yang diberikan adalah $L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2-s-6}\right\}$
- Bentuk ini tidak ada dalam bentuk transformasi standar, sehingga kita harus menguraikannya kedalam bentuk standar terlebih dahulu.
- Kita bisa menuliskan $\frac{3s+1}{s^2-s-6}$ sebagai $\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s-3}$
- Sehingga $L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^2-s-6}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s-3}\right\}$
- Dan hasilnya adalah $\boxed{e^{-2t}+2e^{3t}}$
- Persamaan $\frac{1}{s+2}$ and $\frac{2}{s-3}$ disebut pecahan parsial dari

$$\frac{3s+1}{s^2-s-6}$$

- Aturan dalam pecahan parsial
  - Derjat pembilang harus lebih rendah dari penyebut, hal ini yang sering terjadi pada transformasi laplace. Jika tidak, kita harus membaginya terlebih dahulu.
  - Faktorkan penyebutnya kedalam faktor prima.
  - Faktor linier (s + a) akan menghasilkan pecahan parsial $\frac{A}{s+a}$ dimana A adalah konstanta yang harus ditentukan.
  - Faktor $(s + a)^2$ menghasilkan $\frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+a)^2}$.
  - Serupa dengan diatas, $(s+a)^3$ gives $\frac{A}{(s+a)} + \frac{B}{(s+a)^2} + \frac{C}{(s+a)^3}$.
  - Faktor kuadrat (s^2+ps+q) gives $\frac{Ps+Q}{s^2+ps+q}$.
  - Faktor kuadrat yang diulang $(s^2+ps+q)^2$ menghasilkan

    $$\frac{Ps+Q}{s^2+ps+q} + \frac{Rs+T}{(s^2+ps+q)^2}.$$

- Contoh 1
  - Tentukanlah $L^{-1}\left\{\dfrac{5s+1}{s^2-s-12}\right\}$.
  - Penyelesaian
    - Pertama, kita periksa apakah derjat pembilang lebih rendah dari penyebut. Dan jawabannya iya.
    - Faktorkan penyebutnya $\dfrac{5s+1}{s^2-s-12}=\dfrac{5s+1}{(s-4)(s+3)}$.
    - Sehingga didapat pecahan parsial dari persamaan diatas yaitu
      $\dfrac{A}{s-4}+\dfrac{B}{s+3}$
    - Sekarang kita cari nilai A dan B

$$\frac{5s+1}{s^2-s-12}\equiv\frac{A}{s-4}+\frac{B}{s+3}$$

$$5s+1\equiv A(s+3)+B(s-4)$$

Let $(s-4)=0$, i.e. $s=4 \quad \therefore\ 21=A(7)+B(0) \quad \therefore\ A=3$

Let $(s+3)=0$, i.e. $s=-3$ and we get $B=2\ldots\ldots$

$$\therefore\ \frac{5s+1}{s^2-s-12}\equiv\frac{3}{s-4}+\frac{2}{s+3}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left\{\frac{5s+1}{s^2-s-12}\right\} = 3e^{4t}+2e^{-3t}$$

- Contoh 2
  - Tentukanlah $L^{-1}\left\{\dfrac{9s-8}{s^2-2s}\right\}$.
  - Penyelesaian

$$L\{f(t)\} = \frac{9s-8}{s^2-2s}.$$

(a) Numerator of first degree; denonominator of second degree. Therefore rule satisfied.

(b) $\dfrac{9s-8}{s(s-2)} \equiv \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-2}$.

(c) Multiply by $s(s-2)$. $\therefore\ 9s-8 = A(s-2) + Bs$.

(d) Put $s = 0$. $\quad -8 = A(-2) + B(0) \quad \therefore\ A = 4$.

(e) Put $s - 2 = 0$, i.e. $s = 2$. $\quad 10 = A(0) + B(2) \quad \therefore\ B = 5$.

$$\therefore\ f(t) = L^{-1}\left\{\frac{4}{s} + \frac{5}{s-2}\right\} = 4 + 5e^{2t}$$

- Contoh 3
  - Tentukanlah Invers transformasi Laplace $\frac{s^2-15s+41}{(s+2)(s-3)^2}$
  - Penyelesaian

$$\frac{s^2-15s+41}{(s+2)(s-3)^2} = \frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-3}+\frac{C}{(s-3)^2}$$

Now we multiply throughout by $(s+2)(s-3)^2$ and get

$$s^2-15s+41 \equiv A(s-3)^2+B(s+2)(s-3)+C(s+2)$$

Putting $(s-3)=0$ and then $(s+2)=0$ we obtain $A=3$ and $C=1$

- Dengan menyamakan koefisien s^2, diperoleh

$$1=A+B \quad \therefore \ 1=3+B \quad \therefore \ B=-2$$

So $$\frac{s^2-15s+41}{(s+2)(s-3)^2}=\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s-3}+\frac{1}{(s-3)^2}$$

Now $L^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\} = 3e^{-2t}$ ..... and $L^{-1}\left\{\frac{2}{s-3}\right\} = 2e^{3t}$ ......

But what about $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\}$?

We remember that $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$ ...

and that by Theorem 1, if $L\{f(t)\} = F(s)$ then $L\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$.

$\therefore \quad \frac{1}{(s-3)^2}$ is like $\frac{1}{s^2}$ with s replaced by $(s-3)$ i.e. $a = -3$.

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = te^{3t}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{s^2 - 15s + 41}{(s+2)(s-3)^2}\right\} = 3e^{-2t} + 2e^{3t} + te^{3t}$$

- Contoh 4
  - Tentukanlah $L^{-1}\left\{\dfrac{4s^2-5s+6}{(s+1)(s^2+4)}\right\}$.
    - Dari soal bisa dilihat bahwa salah satu faktor penyebutnya adalah faktor kuadrat, sehingga

$$\frac{4s^2-5s+6}{(s+1)(s^2+4)} \equiv \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

$$\therefore\ 4s^2-5s+6 \equiv A(s^2+4)+(Bs+C)(s+1).$$

- (s + 1) = 0, maka s = -1 sehingga $15 = 5A \quad \therefore\ A = 3$
- Dengan menyamakan koefisien s^2, diperoleh

$$4 = A + B \quad \therefore\ 4 = 3 + B \quad \therefore\ B = 1$$

- Dengan menyamakan koefisien konstanta, diperoleh

$$6 = 4A + C \quad \therefore\ 6 = 12 + C \quad \therefore\ C = -6$$

- Sehingga,

$$L\{f(t)\} = \frac{3}{s+1} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{6}{s^2+4}$$

$$\therefore\ f(t) = 3e^{-t} + \cos 2t - 3\sin 2t$$

Latihan

Express in partial fractions

(a) $$\frac{22s+16}{(s+1)(s-2)(s+3)};$$ (b) $$\frac{s^2-11s+6}{(s+1)(s-2)^2}.$$

(b) $$\frac{1}{s+1}+\frac{4}{s-2}-\frac{5}{s+3};$$ (b) $$\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s-2}-\frac{4}{(s-2)^2}$$

Aturan Cover Up

- Ini adalah aturan untuk menentukan nilai A, B, C dst dari pecahan parsial.
- Aturan ini hanya berlaku jika penyebutnya pecahan aslinya tidak memiliki pengulangan, faktor linier.

contoh 1

- $F(s) = \frac{9s \quad 8}{s(s-2)}$ mempunyai bentuk pecahan parsial $\frac{A}{s} + \frac{B}{s-2}$.
- Dengan aturan cover up, konstanta A dicari dengan cara menghitung nilai limit ketika s mendekati 0

$$\lim_{s \to 0} \left\{ \frac{9s-8}{s-2} \right\} = 4$$

- Sehingga A = 4, sedangkan konstanta B ditentukan dengan cari menghitung nilai limit ketika s medekati 2

$$\lim_{s \to 2} \left\{ \frac{9s-8}{s} \right\} = 5$$

- Sehingga $\frac{9s-8}{s(s-2)} = \frac{4}{s} + \frac{5}{s-2}$

Contoh 2

$$F(s) = \frac{s+17}{(s-1)(s+2)(s-3)} \equiv \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3}.$$

A: cover up $(s-1)$ in $F(s)$ and find

$$\lim_{s\to 1}\left\{\frac{s+17}{(s+2)(s-3)}\right\} = \frac{18}{-6} \qquad \therefore\ A = -3$$

$$B = \lim_{s\to -2}\left\{\frac{s+17}{(s-1)(s-3)}\right\} = \frac{15}{(-3)(-5)} = 1 \qquad \therefore\ B = 1$$

$$C = \lim_{s\to 3}\left\{\frac{s+17}{(s-1)(s+2)}\right\} = \frac{20}{(2)(5)} = 2 \qquad \therefore\ C = 2$$

$$\therefore\ F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-3} - \frac{3}{s-1}$$

So $f(t) = e^{-2t} + 2e^{3t} - 3e^{t}$

Latihan

Determine

(a) $L^{-1}\left\{\dfrac{4s^2 - 17s - 24}{s(s+3)(s-4)}\right\}$; (b) $L^{-1}\left\{\dfrac{5s^2 - 4s - 7}{(s-3)(s^2+4)}\right\}$.

(a) $2 + 3e^{-3t} - e^{4t}$; (b) $2e^{3t} + 3\cos 2t + \dfrac{5}{2}\sin 2t$